

数学的証明における *but* の機能：証明コーパスの構築と分析

山田 鈴太^{1,2} 山崎 紗紀子² 安東 里沙子² 天本 貴之² 秋吉 亮太¹ 峯島 宏次²¹ 電気通信大学 ² 慶應義塾大学

{rinta.yamada.cs,sakiko.yamasaki8008,georg.logic}@gmail.com

{risakochoan,amamoto,minesima}@keio.jp

概要

本研究は、自然言語で書かれた数学的証明における接続表現 *but* の役割を検討する。*but* は言語学や談話分析では広く研究されてきたが、数学的証明における機能は十分に検討されていない。そこで、数理論理学、集合論、初等代数学の教科書から抽出した 261 件の証明を対象にアノテーションを行い、*but* 節が証明構造で果たす役割を分析する。特に、*but* は対比や例外を示すだけでなく、推論の重要な転換点を示し、証明談話の構造化に寄与することを明らかにする。また、証明支援系 Lean の形式的証明との比較を通じて、これらの節が具体的な推論ステップとどのように対応しているかを考察する。

1 はじめに

数学の教科書や論文における非形式的な証明は、自然言語と数学的記法を組み合わせたハイブリッドな言語で書かれており、分野固有の語彙や統語構造をもつことが知られている [1, 2]。文レベルを超えて、数学的推論における文間の関係、すなわち談話関係を捉えることは、議論の構造や定理の正当化を理解する上で不可欠である [3, 4, 5]。しかし、数学的証明に特有の談話関係は、計算言語学を含む関連分野において十分に研究されてこなかった。

数学的談話では、論理結合子 (*and, or, if*) や推論標識 (*therefore, since, because*) に加え、証明全体の構造に寄与する非論理的な接続表現も用いられる。その中でも、接続詞 *but* は証明中に頻出する。こうした逆接・譲歩表現は、理論言語学 [6, 7] やコーパスに基づく談話分析 [8] で広く研究されてきた一方で、数学的談話における非論理的な接続表現の役割をコーパスに基づいて分析した研究は少ない。この点の解明は、言語学的関心にとどまらず、証明の自動形式化 (autoformalization) や非形式化 (informalization) の研究にとっても重要であろう [9, 10, 11]。

本研究では、非形式的な数学的証明における接続詞 *but* に焦点を当て、数学の教科書に現れる証明を集めたコーパスを構築し、*but* の機能についてアノテーションと分析を行う。収集した証明の一部には、Lean による形式的証明を付与する。これにより非論理的な接続表現が数学的推論において果たす談話機能を明らかにし、自然言語で書かれた証明構造の理解と自動形式化に向けた基盤を提供する。

2 アノテーションスキーマ

2.1 ラベルの定義と例

本節では、証明における接続詞 *but* の出現に対して、その属性を表す 2 種類のラベルを導入する。

2.1.1 証明ラベル

まずは証明ラベル (P-Label) を導入する。これは *but* の出現が証明の中で本質的な役割を果たしているか否かを区別するためのものであり、以下の PROOF, PROOF-NEG, META の 3 つの下位ラベルがある。

証明の本質的なステップを示す節で用いられる *but* には、PROOF ラベルを付与する。たとえば (1) では、*but* 節が欠けると証明が論理的に不完全になるため、この *but* には PROOF を与える。

(1) P-Label: PROOF

[...] we can conclude that $a \in B$. **But** $a \notin B \setminus C$, so it follows that $a \in C$. [12, p.111]

特に、ある仮定 P のもとで矛盾を示し、そこから $\neg P$ を導く *but* の出現には、PROOF-NEG を付与する。

(2) P-Label: PROOF-NEG

Suppose $x^2 + y = 13$ and $y \neq 4$. Suppose $x = 3$. [...] **But** this contradicts the fact that $y \neq 4$. Therefore $x \neq 3$. [12, p.104]

一方で証明の中で注意や補足を述べるために用いられる *but* もある。この場合、*but* 節が欠けても

証明の妥当性は変わらず、形式化された証明では、このタイプの *but* 節は無視できる。これらの用例には META ラベルを付与する。例えば、以下の (3) 中の *but* 節は、明らかに証明の根幹には影響しない。

(3) **P-Label:** META

A function $f: \omega \rightarrow A$ for which $f(n^+) < f(n)$ (for all $n \in \omega$) is sometimes called a descending chain, **but** this terminology should not be confused with other uses made of the word “chain.” [13, Theorem 7B, p.173]

2.1.2 関係ラベル

英語における接続詞 *but* の代表的な 2 つの用法は、対比 (contrast) と例外 (exception) である [14, p.1310]。

(4) John is tall **but** Paul is short. (対比)

(5) Everyone **but** Bob came. (例外)

大まかに言って、対比関係は A but B の 2 つの項が意味的に対立することを表す。一方で (5) の例外関係は、「Bob を除いて全員が来た」ということを意味している¹⁾。

このような分類に従って、*but* により導入される談話関係に対しては CONTRAST と EXCEPTION の 2 種類のラベルを与え、さらにそのどちらにも合致しないものは NEITHER と分類することにする。これらのラベルを **関係ラベル (R-Label)** と呼ぶ。

以下に CONTRAST ラベルと EXCEPTION ラベルの例をそれぞれ示す。

(6) **R-Label:** CONTRAST

If E had an element not in D , the complement of such an element would be an upper bound of D **but** not of E . [18, Lemma 1, p.61]

(7) **R-Label:** EXCEPTION

This is the same as the pigeonhole principle, **but** for an arbitrary finite set A instead of a natural number. [13, Theorem 6C, p.135]

例 (6) 中の *but* は “of D ” と “not of D ” の間の対比を表している。一方、例 (7) における *but* は、「～を除いては」という意味であり、ここで問題にしている証明が、*but* 以下の点を除いては鳩ノ巣原理 (pigeonhole principle) と同様であることを強調している。

1) 対比関係はしばしばさらに譲歩 (concession) 関係とも区別され [15, 16]、PDTB-3.0 [17] はこの区別を採用している。しかし [17, p.24] でも指摘されているように、対比関係と譲歩関係の区別は困難なことが多く、したがって本稿のアノテーションでは採用していない。

非形式的な数学的証明においては、*but* は上に挙げた 2 種類の用法以外にも盛んに用いられる。以下の例について考えよう。

(8) **R-Label:** NEITHER

Suppose $\neg R$. Suppose P . Since P and $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$, it follows that $Q \rightarrow R$. **But** then, since $\neg R$, we can conclude $\neg Q$. Thus, $P \rightarrow \neg Q$. Therefore $\neg R \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$. [12, p.110]

この *but* の出現は、CONTRAST, EXCEPTION どちらの関係も表していない。その前後には意味的に対立する性質も、例外の関係も見出すことはできない。この場合、NEITHER ラベルを与える。

ここで、証明ラベルと関係ラベルは、独立に与えられることに注意しよう。たとえば、(6) における *but* の出現は、証明の本質的な一部であり、証明ラベルとしては、PROOF が付与される。同様に、(7) と (8) にはそれぞれ、証明ラベルとして、META と PROOF が付与される。

2.2 その他のアノテーション

2.1 節で定義したラベルに加えて、*but* の各出現例について、その位置と形態も追加でアノテーションした。具体的には、文頭に現れる大文字の *But* は INITIAL とラベル付けし、文中に現れる小文字の *but* は MEDIAL とラベル付けした。たとえば、(1)、(2)、(8) における *But* は INITIAL に分類される一方、(3)、(6)、(7) における *but* は MEDIAL に分類される。

また、*but then*、*but since* などの *but* を含む複合表現については、その形態 (例: *but then*) も含めてアノテーションし、当該の *but* が複合表現の一部であるかどうか分かるようにした。

2.3 証明コーパス概要

本コーパスは、論理学、集合論、算術、初等代数、形式意味論など、複数の領域にまたがる 6 冊の教科書 [12, 19, 13, 18, 20, 21] に基づいて構築した。これらの教科書に含まれる証明のうち、206 件は少なくとも 1 回 *but* を含んでおり、*but* の総出現数は 261 件であった。一つの証明内に *but* が複数回出現する場合には各出現に個別のラベルを割り当てた。なお、ステートメントに現れる *but* は集計対象から除外し、証明に出現するもののみをアノテーション対象とした。また、*although* や *however* などの他の逆接・譲歩的接続詞は出現頻度がきわめて低かったため、本研究では分析を *but* のみに限定した。付録の表 2

表 1: 証明ラベルと関係ラベルのクロス集計

ラベル	CONTRAST	EXCEPTION	NEITHER	合計
PROOF	50	9	108	167
PROOF-NEG	6	0	44	50
META	13	6	23	42
合計	69	15	175	259

は、各教科書における *but* を含む証明の数と、*but* の総出現数をまとめたものである。

アノテーションは、論理学の専門的な知識をもつ 6 名で実施した。単独のアノテータによる判断が難しいような例については、全アノテータによる協議を経て、最終的なラベルを決定した。

3 アノテーションの結果

3.1 ラベルの分布

表 1 に示すように、*but* の出現例の大半 (83.8%) は証明用法 (PROOF または PROOF-NEG) に分類され、META 用法は 16.2% であった。証明用法の内訳を見ると、PROOF (64.5%) は PROOF-NEG (19.3%) を上回っており、*but* 節は矛盾へ導く段階だけでなく、証明を前進させる段階で頻繁に用いられることが分かる。

表 1 は関係ラベルの分布も示している。CONTRAST は 26.7% (69 件)、EXCEPTION は 5.8% (15 件) であった。注目すべき点として、NEITHER とラベル付けされた事例が 67.6% (175 件) と多数を占め、その大部分 (152 件) は証明用法 (PROOF または PROOF-NEG) であった。これらの事例は、明示的な対立や例外を示すというよりも、以下で見ると、証明の重要な転換点を示す用法であり、*but* が非形式的な数学的証明において推論全体の構造化に寄与することを示唆している。

文中での位置と証明ラベルの関係については、付録の表 3 にまとめたように、文頭 (INITIAL) が 259 件中 171 件 (66%) を占め、その多くが証明用法であった (PROOF=106、PROOF-NEG=44)。一方、文中 (MEDIAL) の *but* は主に証明用法で用いられるが、一部は META 節も見られた。

出現位置と関係ラベルについては、付録の表 4 が示すように、文頭 (INITIAL) は圧倒的に NEITHER と対応しており (151/171 = 88%)、一方、文中 (MEDIAL) は CONTRAST または EXCEPTION と強く結び付いている (64/88 = 73%)。文頭の *But* は主として談話標識として機能し、新たな証明区間の開始を示すのに対

し、文中の *but* は個々の証明ステップ内部での局所的な対比や例外を表すという傾向が見られた。

複合表現については、以下の三つが特に注目される。(1) *but then* は最も頻出し (52 件)、主に証明文脈 (PROOF: 35、PROOF-NEG: 17) に現れ、すべて NEITHER とラベル付けされた。(2) *but since* は 16 件確認され、その多くが PROOF に属し、理由を明示する推論ステップを導入する表現として、NEITHER と分類された。(3) *but when* は稀である (2 件) が、条件付きの推論ステップを提示する用法が見られた。

3.2 *but* の用法の下位分類

本節では、PROOF および META ラベルのバリエーションを分析し、頻出する用法を下位分類することで、*but* の証明の中での役割をより詳しく考察する。

3.2.1 Proof ラベル

PROOF ラベルに関して特筆すべき点は、*but* が対比関係や例外関係を示すためではなく、証明の重要なステップを標示するために使われていることである。例えば (9) において、*but* は仮定 $\forall a \in A (f(a) = g(a))$ が適用される箇所を示しており、一般的な導出と与えられた前提の適用とを区別している。よって *but* は証明における重要な推論の進行を示すマーカーとして機能している。

(9) P-Label: PROOF, R-Label: NEITHER

Suppose $\forall a \in A (f(a) = g(a))$, and let (a, b) be an arbitrary element of f . Then $b = f(a)$. **But** by our assumption $f(a) = g(a)$, so $b = g(a)$ and therefore $(a, b) \in g$. [12, Theorem 5.1.4, p.232]

さらに PROOF ラベルの下に、*but* の用法に対応する以下のサブクラスを特定した。

仮定の導入 以下の例 (10) において、*but* は 2 つの可能性 “ S is empty” と “ S is not empty” を対比させるだけでなく、後続の推論を導く代替的な仮定を導入する役割も果たしている。

(10) P-Label: PROOF, R-Label: CONTRAST

We hope that S is empty. **But** if not, then there is a least $t \in S$. [13, Theorem 7D, p.183]

これらの事例は暗黙の *otherwise* と同一視することができ、推論において新たな仮定が導入される分岐点を標示している。PROOF と CONTRAST の両方のラベルが付けられた事例の大部分はこのカテゴリに分類され、これらにおいては *but* が証明内での条件付きまたは代替的な仮定を導入している。

自明なステップの導入 もう一つのサブクラスは *but* が自明ないし即座に導かれるステップを導入しているもので、“But this is trivial” といった表現がよく用いられる。その内容は単純であるが、証明にとって論理的に不可欠である。

- (11) **P-Label:** PROOF, **R-Label:** NEITHER
We must show that $\text{card}(V_\omega) = \aleph_0$. **But** this is clear, since V_ω is the union of \aleph_0 finite sets of increasing size. [13, Theorem 9J, p.252]

3.2.2 Meta ラベル

META ラベルが付与された事例では、証明中の注釈や但し書きを導入する *but* が典型的に見られる。こうした注釈は省略しても証明の妥当性には影響しないが、明確さと可読性を高める。我々は、**META** ラベルについても以下のサブクラスを特定した。

注釈の追加 以下の (12) のように、このサブクラスに属する *but* は、証明にとって核心的な推論ステップの外にあるコメントや注釈を導入する。

- (12) **P-Label:** META, **R-Label:** CONTRAST
Clearly f is onto, since by definition all rational numbers can be written as a fraction, **but** note that f is not one-to-one. [12, Theorem 8.1.6, p. 458].

ゴールの提示 このサブクラスには、典型的な「…であることを示す」といった表現に代わり、*but* 節が証明のゴールを提示する事例が含まれる。これらの言明は必須ではないが、証明の可読性を高めるのに寄与している²⁾。

- (13) **P-Label:** META, **R-Label:** CONTRAST
Obviously, *at most* one of the alternatives $s \subset y$, $x = y$, or $y \subset x$ can hold, **but** we must prove that at least one holds. [13, Theorem 5RA, p. 113–114]

3.3 Lean の形式的な証明構造との比較

この節では、*but* に着目し、自然言語による非形式的な証明と Lean による形式的な証明を比較する。Lean は数学的証明の形式化に広く用いられている証明支援系である [22]。本コーパスに含まれる [12] の証明の一部には、[23] において対応する Lean の証明が付与されており、本研究ではこれを利用する³⁾。

- 2) 3.3 節で見ると、Lean による形式化では *show* 文を明示的に記述することで証明のゴールを提示し、可読性を高めることができる。
3) [23] の形式的証明では、自然言語の証明により近い付加的なタクティクスが用いられており、自然言語の証明と形式的な証明との比較に適している。

自然言語の証明と Lean の証明とが綺麗に対応しているような例もあるが (付録 A を参照のこと)、特筆すべきは、自然言語の証明と Lean の証明との間に直接的な対応が見られない例が存在する点である。例えば、次の定理の証明を見よう。

- (14) **Theorem.** Suppose B is a set and F is a family of sets. If $\bigcup F \subseteq B$ then $F \subseteq \mathcal{P}(B)$. [12, Example 3.3.5, p.124]

自然言語の証明は、(L1) から (L7) のように進む。

- (L1) Suppose $\bigcup F \subseteq B$.
(L2) Let x be an arbitrary element of F .
(L3) Let y be an arbitrary element of x .
(L4) Since $y \in x$ and $x \in F$, by the definition of $\bigcup F$, $y \in \bigcup F$.
(L5) **But** then since $\bigcup F \subseteq B$, $y \in B$.
(L6) Since y was an arbitrary element of x , we can conclude that $x \subseteq B$, so $x \in \mathcal{P}(B)$.
(L7) **But** x was an arbitrary element of F , so this shows that $F \subseteq \mathcal{P}(B)$, as required.

Lean の証明は、以下の通りである [23, pp.40–43]。

```
1 theorem Example_3_3_5 (U : Type) (B : Set U)
2 (F : Set (Set U)) :  $\bigcup \emptyset F \subseteq B \rightarrow F \subseteq \mathcal{P} B := \text{by}$ 
3   assume h1 :  $\bigcup \emptyset F \subseteq B$ 
4   define
5   fix x : Set U
6   assume h2 :  $x \in F$ 
7   define
8   fix y : U
9   assume h3 :  $y \in x$ 
10  define at h1
11  apply h1 _
12  define
13  apply Exists.intro x _
14  show  $x \in F \wedge y \in x$  from And.intro h2 h3
15  done
```

Lean の証明における 14 行目において、証明の目標と方法が与えられ、証明は終了する。(L4) は 14 行目に対応しているが、(L5) 以降の行に直接対応するものは、Lean の証明の中には含まれていない。(L6) と (L7) では、証明の読みやすさの観点から、全称汎化に対応するステップが明示的に述べられている。

4 おわりに

本研究では、非形式的な数学的証明に現れる接続詞 *but* を対象に、アノテーションを行い、証明構造における役割を分析した。今後は、他の接続詞や他の数学分野の証明にも分析を拡張する。また、構築した証明コーパスを活用し、証明の自動形式化や教育的な証明作成支援への応用を目指す。自然言語の証明と Lean の形式的証明との比較についてのより詳細な分析もまた、今後の課題の一つとしたい。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP24K00004、および、JST CREST JPMJCR2114 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Aarne Ranta. Syntactic categories in the language of mathematics. In Peter Dybjer, Bengt Nordström, and Jan Smith, editors, **Types for Proofs and Programs**, pp. 162–182. Springer, 1995.
- [2] Mohan Ganesalingam. **The Language of Mathematics: A Linguistic and Philosophical Investigation**. Springer, 2013.
- [3] Takuya Matsuzaki, Takumi Ito, Hidenao Iwane, Hirokazu Anai, and Noriko H. Arai. Semantic parsing of pre-university math problems. In Regina Barzilay and Min-Yen Kan, editors, **Proceedings of the 55th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 1: Long Papers)**, pp. 2131–2141, Vancouver, Canada, July 2017. Association for Computational Linguistics.
- [4] Marcos Cramer, Bernhard Fisseni, Peter Koepke, Daniel Kühlwein, Bernhard Schröder, and Jip Veldman. The Naproche project controlled natural language proof checking of mathematical texts. In **International Workshop on Controlled Natural Language**, pp. 170–186. Springer, 2009.
- [5] Marcos Cramer and Mathieu Guillaume. Empirical study on human evaluation of complex argumentation frameworks. In **European Conference on Logics in Artificial Intelligence**, pp. 102–115. Springer, 2019.
- [6] Nicholas Asher and Alex Lascarides. **Logics of Conversation**. Cambridge University Press, 2003.
- [7] Sandrine Zufferey and Liesbeth Degand. **Connectives and Discourse Relations**. Cambridge University Press, 2024.
- [8] Rashmi Prasad, Bonnie Webber, and Aravind Joshi. Reflections on the Penn Discourse TreeBank, Comparable Corpora, and Complementary Annotation. **Computational Linguistics**, Vol. 40, No. 4, pp. 921–950, 12 2014.
- [9] Christian Szegedy. A promising path towards autoformalization and general artificial intelligence. In **International Conference on Intelligent Computer Mathematics**, pp. 3–20. Springer, 2020.
- [10] Ke Weng, Lun Du, Sirui Li, Wangyue Lu, Haozhe Sun, Hengyu Liu, and Tiancheng Zhang. Autoformalization in the era of large language models: A survey. **arXiv preprint arXiv:2505.23486**, 2025.
- [11] Cezary Kaliszyk, Josef Urban, and Jiří Vyskočil. Automating formalization by statistical and semantic parsing of mathematics. In **International Conference on Interactive Theorem Proving**, pp. 12–27. Springer, 2017.
- [12] Daniel J. Velleman. **How to Prove It: A Structured Approach**. Cambridge University Press, 3 edition, 2019.
- [13] Herbert B Enderton. **Elements of Set Theory**. Academic Press, 1977.
- [14] Rodney D. Huddleston and Geoffrey K. Pullum. **The Cambridge Grammar of the English Language**. Cambridge University Press, 2002.
- [15] Andrew Kehler. **Coherence, Reference, and the Theory of Grammar**. CSLI publications, 2002.
- [16] Grégoire Winterstein. What *but*-sentences argue for: An argumentative analysis of *but*. **Lingua**, Vol. 122, No. 15, pp. 1864–1885, 2012.
- [17] Bonnie Webber, Rashmi Prasad, Alan Lee, and Aravind Joshi. **The Penn Discourse Treebank 3.0 Annotation Manual**. 2019.
- [18] Paul R. Halmos. **Lectures on Boolean Algebras**. Springer, 1974.
- [19] Herbert B Enderton. **A Mathematical Introduction to Logic**. Academic Press, 2 edition, 2001.
- [20] Barbara H. Partee, Alice ter Meulen, and Robert E. Wall. **Mathematical Methods in Linguistics**. Springer, 1990.
- [21] Fred Landman. **Structures for Semantics**. Springer, 1991.
- [22] Jeremy Avigad and Patrick Massot. Mathematics in Lean, 2025. Release v4.19.0. https://avigad.github.io/mathematics_in_lean/mathematics_in_lean.pdf.
- [23] Daniel Velleman. How to prove it with Lean, 2023. URL: <https://djvelleman.github.io/HTPIwL>.

A 付録

A.1 コーパスの詳細

表 2 に構築した証明コーパスのソースの詳細を示す。証明数は *but* が少なくとも 1 回出現する証明の数を表し、出現回数は証明の中での *but* の総出現数を表わす。

表 2: 証明コーパスのソースの概要

ソース	証明数	出現回数
Velleman [12]	38	46
Halmos [18]	6	7
Partee [20]	20	27
Enderton [19]	41	46
Enderton [13]	56	74
Landman [21]	39	61
Total	206	261

A.2 アノテーション結果の詳細

第 3 節で論じた、文中での *but* の位置と証明ラベルおよび関係ラベルの対応について、表 3 と表 4 にそれぞれ示す。

表 3: 証明ラベルと *but* の文中での位置：Initial は文の冒頭、Medial は文の中間の位置を表わす。

ラベル	Initial	Medial	合計
PROOF	106	61	167
PROOF-NEG	44	6	50
META	21	21	42
合計	171	88	259

表 4: 関係ラベルと *but* の文中での位置 (Initial/Medial)

関係ラベル	Initial	Medial	合計
CONTRAST	19	50	69
EXCEPTION	1	14	15
NEITHER	151	24	176
合計	171	88	259

A.3 Lean の形式的証明との対応の詳細

自然言語の証明と Lean の証明との対応関係が比較的にはっきりしている例を挙げる。

(15) **Theorem.** There is a unique set A such that for

every set B , $A \cup B = B$. [12, Example 3.6.2, p.157]

自然言語の証明は (L1) から (L4) のように進む。これは、PROOF ラベルを付与された *but* の例である。

(L1) Existence: Clearly $\forall B(\emptyset \cup B = B)$, so \emptyset has the required property.

(L2) Uniqueness: Suppose $\forall B(C \cup B = B)$ and $\forall B(D \cup B = B)$.

(L3) Applying the first of these assumptions to D we see that $C \cup D = D$, and applying the second to C we get $D \cup C = C$.

(L4) **But** clearly $C \cup D = D \cup C$, so $C = D$.

Lean の対応する証明は、以下の通りである [23, pp.83–87]。

```
1 theorem Example_3_6_2 (U : Type) : ∃
2 ! (A : Set U), ∀ (B : Set U), A ∪ B = B := by
3 exists_unique •
4 -- Existence
5 apply Exists.intro ∅
6 show ∀ (B : Set U), ∅ ∪ B = B from empty_union
7 done •
8 -- Uniqueness
9 fix C : Set U; fix D : Set U
10 assume h1 : ∀ (B : Set U), C ∪ B = B
11 assume h2 : ∀ (B : Set U), D ∪ B = B
12 have h3 : C ∪ D = D := h1 D
13 have h4 : D ∪ C = C := h2 C
14 show C = D from
15   calc C
16     = D ∪ C := h4.symm
17     = C ∪ D := union_comm D C
18     = D := h3
19 done
20 done
```

Lean の証明では、集合 A の存在と一意性を示すために、exists_unique タクティクを用いる。このタクティクは EXISTENCE と UNIQUENESS の二つのパートから構成される。Lean の 4–7 行目は EXISTENCE パートに対応しており、自然言語の証明における (L1) と対応する。

次に UNIQUENESS パートについて述べる。Lean の証明では、 D に対して 10 行目を適用し、 C に対して 11 行目を適用している。その結果、 $C \cup D = D$ と $D \cup C = C$ が、12 行目と 13 行目とでそれぞれ導かれる。自然言語の証明では、(L2) と (L3) とが、これらの適用に対応している。さらに、Lean の証明では、 $C = D$ と結論づけるため、calc タクティクが用いられている。自然言語の証明では、(L4) がこの同じ結論 $C = D$ を導き出している。